Exercício 24 (Cap. 6 do livro)

a) Em 1000 adeptos seleccionados casualmente qual é, aproximadamente, a probabilidade de se observarem menos de 720 com opinião favorável à direcção??

X_i variável aleatória que representa se o adepto tem opinião favorável sobre a direção.
$X_i \sim B(1,\theta)$
$\theta = P(\text{opinião favorável}) = 0.75 \Rightarrow X_i \sim B(1, 0.75)$

$T = \sum_{i=1}^{1000}$ variável aleatória que representa o número de adeptos com opinião favorável sobre a direção em 1000 adeptos

Utilizando o corolário do Teorema do Limite Central tem-se
$X_i \sim B(1, 0.75) \Rightarrow \frac{T-1000\times 0.75}{\sqrt{1000\times 0.75\times(1-0.75)}} \sim N(0,1)$

$$P(T < 720) = P(T \le 719) \approx P\left(\frac{T - 1000 \times 0.75}{\sqrt{1000 \times 0.75 \times (1 - 0.75)}} \le \frac{719 + \frac{1}{2} - 1000 \times 0.75}{\sqrt{1000 \times 0.75 \times (1 - 0.75)}}\right) =$$
$$= \Phi(-2.23) = 1 - \Phi(2.23) = 1 - 0.9871 = 0.0129$$

b) Qual deverá ser a dimensão mínima de uma amostra casual de adeptos para que o desvio entre a frequência relativa da amostra e a verdadeira proporção de adeptos favoráveis à direcção não atinja 0.02 em pelo menos 95% dos casos?

$n : P\left(\left|\bar{X} - 0.75\right| < 0.02\right) \ge 0.95$

Utilizando o corolário do Teorema do Limite Central tem-se

$X_i \sim B(1, 0.75) \Rightarrow \frac{\bar{X}-0.75}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}} \sim N(0,1)$

$$P\left(-0.02 < \bar{X} - 0.75 < 0.02\right) \approx \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right)\right] = 2 \times \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right) - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 \times \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right) - 1 \ge 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}}\right) \ge 0.975 \Rightarrow \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{n}}} \ge 1.96 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n \ge \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \times 0.75 \times (1 - 0.75) \Leftrightarrow n \ge 1800.75 \Rightarrow n = 1801$$